

# Modelos de Propagacion electromagnética

## Modelos estocásticos de propagación (2)

Alexandre Wagemakers y Borja Ibarz

8 de enero de 2008

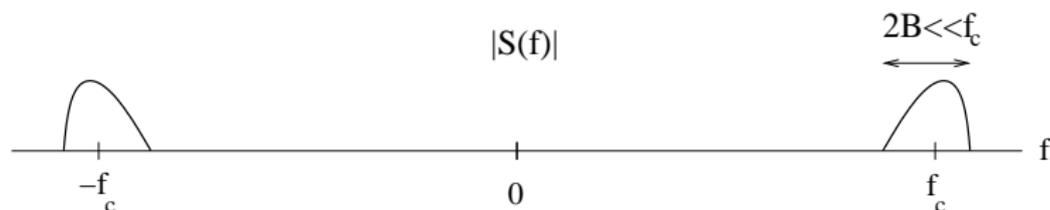
# Desvanecimiento por multitrayecto (1)

Plan de la clase:

- ▶ Señales paso banda.
- ▶ El efecto Doppler.
- ▶ Modelo de canal dispersivo estocástico.
- ▶ Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha.
- ▶ Tasa y duración media de desvanecimiento.
- ▶ Otros modelos de desvanecimiento de banda estrecha.

# Señales paso banda

Las señales transmitidas en comunicaciones móviles son siempre paso banda. El ancho de banda de la señal es mucho menor que la frecuencia de la portadora.



Este tipo de señales puede analizarse con mayor comodidad mediante su **señal paso bajo equivalente**.

## Señales paso banda

Toda señal *real* paso banda, caracterizada por una frecuencia portadora  $f_c$  y un ancho de banda unilateral  $2B$ , puede escribirse en la forma:

$$s(t) = s_I(t) \cos(\omega_c t) - s_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

siendo  $s_I(t)$  y  $s_Q(t)$  señales reales de ancho de banda unilateral  $B$ , llamadas componentes *en fase* y *en cuadratura* de la señal. Otra forma de escribir esto mismo es:

$$s(t) = \Re \{ u(t) e^{j\omega_c t} \}$$

donde

$$u(t) = s_I(t) + j s_Q(t)$$

se denomina *envolvente compleja* o *señal paso bajo equivalente* de la señal  $s(t)$ .

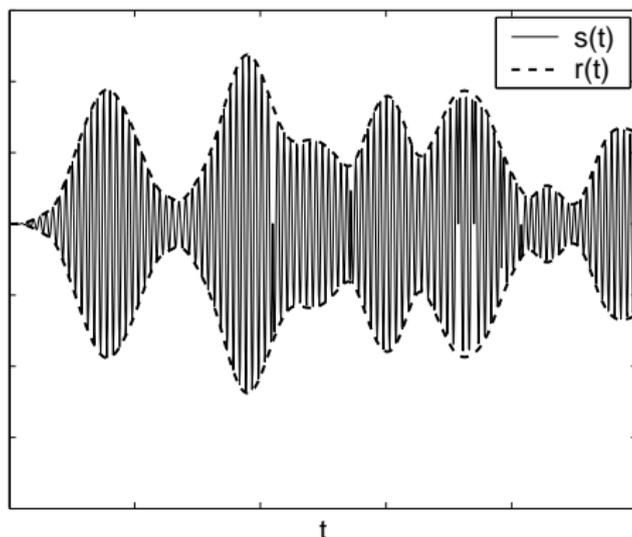
## Señales paso banda

El término *envolvente compleja* se debe a una tercera representación equivalente de la señal:

$$s(t) = r(t) \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

donde son:

$$r(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} \quad \phi(t) = \arctan\left(\frac{s_Q(t)}{s_I(t)}\right)$$



## Señales paso banda

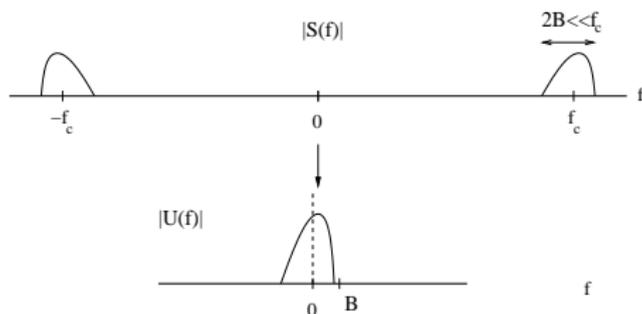
Las señal equivalente paso bajo  $u(t)$  se obtiene de  $s(t)$  así:

$$u(t) = (s(t) + j\hat{s}(t)) e^{-j\omega_c t}$$

donde  $\hat{s}(t)$  es la *transformada de Hilbert* de  $s(t)$ .

El espectro de  $u(t)$  es el espectro unilateral de  $s(t)$ , trasladado desde  $f_c$  al origen de frecuencias, y duplicado en amplitud:

$$S(f) = \frac{1}{2} [U(f - f_c) + U^*(f + f_c)].$$



$u(t)$  es real si y solo si  $S(f)$  es hermítica en torno a  $f_c$ .

## Señales paso banda

Análogamente se puede definir la respuesta equivalente paso bajo de un canal paso banda. Si la respuesta al impulso del canal es la señal real  $h(t)$ , la respuesta del canal paso bajo equivalente satisface:

$$h(t) = 2\Re \{ h_l(t)e^{j\omega_c t} \}$$

El factor 2 hace que el filtro paso bajo equivalente preserve la relación de potencias del original. Si una señal paso banda  $s(t)$  con envolvente compleja  $u(t)$  pasa por un filtro paso banda  $h(t)$ , la salida es paso banda y su envolvente compleja es:

$$v(t) = u(t) * h_l(t) \Leftrightarrow V(f) = U(f)H_l(f)$$

## Señales paso banda

Si, en lugar de una señal determinista, trabajamos con un proceso estocástico  $n(t)$  WSS paso banda (y por tanto de media cero), tenemos resultados similares, modificados por el hecho trabajar con señales de potencia. En concreto:

- ▶ Existe un proceso paso bajo  $\gamma(t) = n_I(t) + j n_Q(t)$  tal que

$$n(t) = n_I(t) \cos(\omega_c t) - n_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

Equivalentemente,  $n(t) = r(t) \cos(\omega_c t + \theta(t))$  con  $r(t)$  y  $\theta(t)$  paso bajo.

- ▶ Los espectros de potencia de las componentes en fase y cuadratura son iguales y valen:

$$G_{n_I}(f) = G_{n_Q}(f) = G_n^+(f + f_c) + G_n^-(f - f_c)$$

(siendo  $G_n^+$  y  $G_n^-$  las partes del espectro de  $n(t)$  de frecuencias positivas y negativas respectivamente)

- ▶ Si  $G_n(f)$  es simétrico respecto a  $f_c$ ,  $n_I$  y  $n_Q$  son incorrelados.

## Señales paso banda

En el caso estocástico, cuando  $n(t)$  es gaussiano de media cero y varianza  $\sigma^2$ , y de espectro de potencia simétrico respecto a  $f_c$ ,  $n_I(t)$  y  $n_Q(t)$  son gaussianos e incorrelados, es fácil probar que  $r(t)$  y  $\theta(t)$  son incorrelados y sus distribuciones son:

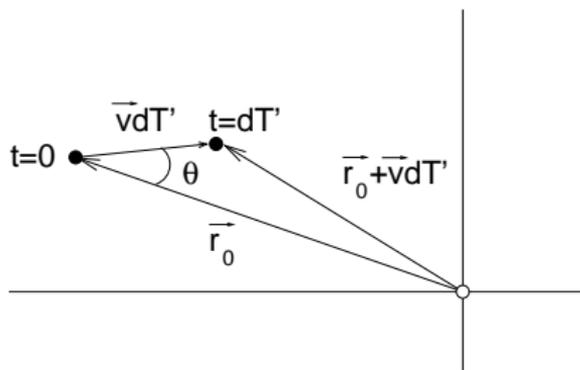
- ▶ Para  $r(t)$ , de **Rayleigh**:

$$f_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad r > 0$$

- ▶ Para  $\theta(t)$ , uniforme en  $[0, 2\pi]$



# El efecto Doppler



La figura permite estimar el efecto Doppler para fuente fija y receptor móvil sobre aquellas frecuencias  $f \gg c/|\vec{r}|$ , siendo  $\vec{r}$  la posición del receptor respecto al emisor.

$$\begin{aligned}dT' - dT &= \frac{|\vec{r}_0 + \vec{v}dT'|}{c} + \frac{|\vec{r}_0|}{c} \Rightarrow \\c(dT' - dT) &= \sqrt{r_0^2 + v^2dT'^2 + 2r_0dT' \cos \theta} - r_0 \Rightarrow \\c(dT' - dT) &= r_0(1 + r_0 \cos \theta dT' + o(dT')) \Rightarrow \\dT' &\approx \frac{dT}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}\end{aligned}$$

Puesto que  $f = 1/dT$ , resulta:  $f' = \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) f$

## El efecto Doppler

El desplazamiento Doppler es:

$$f' - f = -\frac{v}{c} \cos \theta f = -\frac{v}{\lambda} \cos \theta$$

El desplazamiento máximo, para  $\theta = 0$  ó  $\theta = \pi$ , es:

$$f_D = \mp v/\lambda$$

Equivale al número de frentes de onda por segundo que cruzaría el receptor si la onda no se propagase. Por ejemplo, para  $\lambda = 33$  cm ( $f_c = 900$  MHz) y  $v = 25$  m/s (90 km/h),  $f_D = 75$  Hz. Este desplazamiento es muy pequeño frente a  $f_c$ , pero significativo respecto al ancho de banda de la señal moduladora.

## Modelo de canal multitrayecto estocástico

Sea  $s(t)$  la señal transmitida, paso banda, con señal equivalente paso bajo  $u(t)$ :

$$s(t) = \Re \left\{ u(t) e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

$s(t)$  representa normalmente la componente del campo eléctrico en la polarización del receptor.

La señal es dispersada por distintos obstáculos y llega al receptor; cada uno de ellos supone un cierto amortiguamiento  $\alpha_n(t)$  y un retardo  $\tau_n(t)$ ; ambos pueden variar con el tiempo, lentamente si se deben a obstáculos simples, o rápidamente si se deben a obstáculos rugosos o complejos.

La señal recibida puede entonces modelarse como la salida de un *canal lineal variable en el tiempo*.

# Modelo de canal multitrayecto estocástico

La respuesta al impulso de este canal será:

$$h(\tau, t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \delta(\tau - \tau_n(t))$$

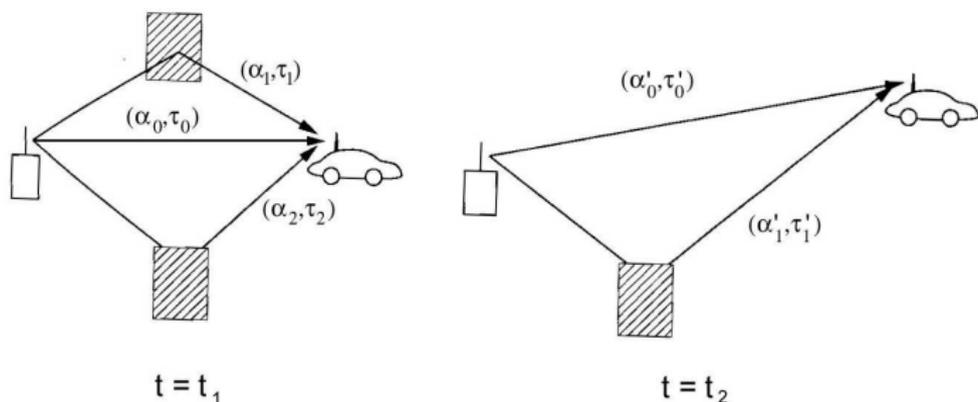
Si el ancho de banda de  $\alpha_n(t)$  y  $\tau_n(t)$  son pequeños frente a  $f_c$ , la respuesta paso bajo equivalente del canal es:

$$h_l(\tau, t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta(\tau - \tau_n(t))$$

Notemos que en la respuesta paso bajo aparecen desfases proporcionales a los retardos.

# Modelo de canal multirayecto estocástico

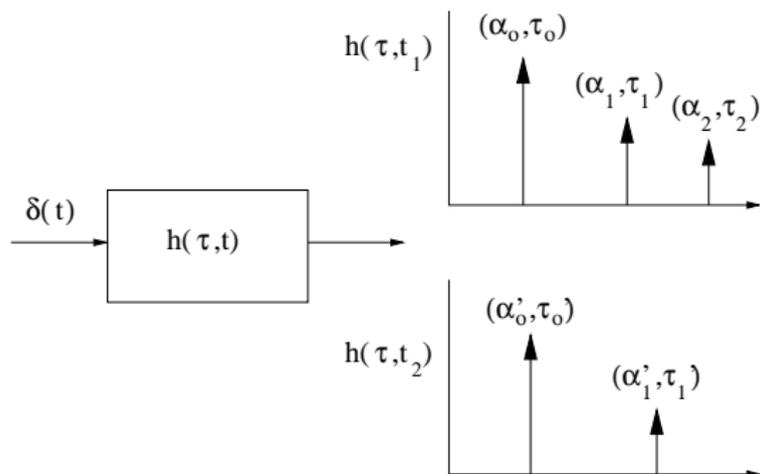
Ejemplo de canal:



En este canal el receptor recibe tres rayos en  $t = t_1$  (uno LOS, y otros dos reflejados en dos obstáculos), y, debido a que se mueve, sólo dos en  $t = t_2$ . El rayo LOS se recibe en todo momento, con retardo  $\tau_0(t)$

# Modelo de canal multitrayecto estocástico

Respuesta del canal:

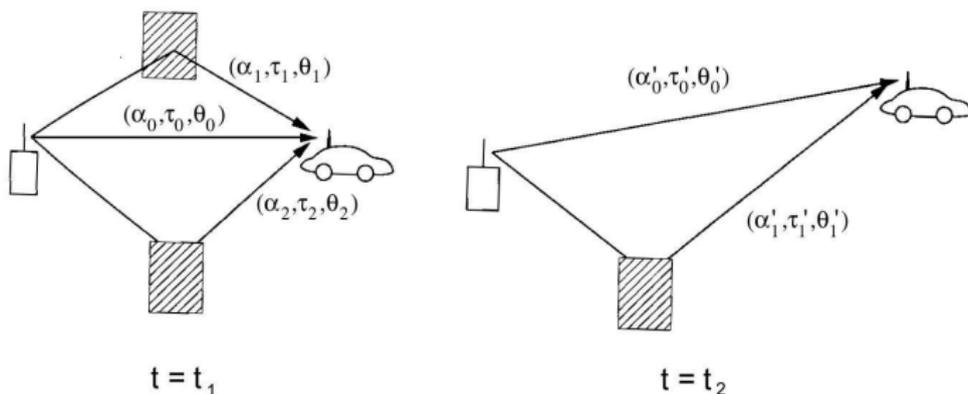


$$h(\tau, t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^2 \alpha_n \delta(\tau - \tau_n) & \text{para } t = t_1 \\ \sum_{n=0}^1 \alpha'_n \delta(\tau - \tau'_n) & \text{para } t = t_2 \\ \alpha_0(t) \delta(\tau - \tau_0(t)) & \text{para } t \neq t_1, t_2 \end{cases}$$

## Modelo de canal multirayecto estocástico

Pero si el receptor está en movimiento respecto al emisor, cada rayo sufre, además de un retardo variable en el tiempo, un corrimiento en frecuencia debido al efecto Doppler, que equivale a un desfase adicional variable en el tiempo:

$$\phi_{D,n}(t) = 2\pi f_D \cos(\theta_n(t)) t$$



## Modelo de canal multitrayecto estocástico

Aunque  $f_D$  es distinto para cada frecuencia, si la señal es de banda estrecha podemos tomar como valor común el correspondiente a  $f_c$ . La respuesta paso bajo del canal es entonces

$$h_l(\tau, t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) e^{-j\phi_n(t)} \delta(\tau - \tau_n(t))$$

siendo  $\phi_n(t) = 2\pi f_c (\tau_n(t) + \frac{v}{c} \cos \theta_n(t) t)$ .

La señal recibida  $r(t)$  tiene entonces un equivalente paso bajo  $u_r(t)$ :

$$u_r(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) u(t - \tau_n(t)) e^{j\phi_n(t)}$$

## Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Un canal multitrayecto se considera **de banda estrecha** o **de desvanecimiento plano** si la dispersión de los retardos  $\tau_n(t)$  es pequeña frente al inverso del ancho de banda de la señal:

$$T_m \ll B^{-1}$$

La dispersión de los retardos  $T_m$  no tiene definición única; es habitual medirla como la desviación típica de los retardos ponderados por su potencia:

$$T_m = \sigma_\tau = \sqrt{\frac{\sum_n \alpha_n^2 (\tau_n - \mu_\tau)^2}{\sum_n \alpha_n^2}}$$

siendo  $\mu_\tau = \sum_n \alpha_n^2 \tau_n / \sum_n \alpha_n^2$ .

Valores típicos de  $T_m$  son del orden de 50 ns en interior y 50  $\mu$ s en exterior (microcélulas). Por tanto el modelo de banda estrecha será aplicable a señales de ancho de banda máximo  $B \approx 2$  MHz en interior y  $B \approx 2$  KHz en exterior (criterio  $B \leq 0,1 T_m^{-1}$ )

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Cuando se cumple la condición de banda estrecha, las componentes  $u(t - \tau_n)$  y  $u(t - \tau_m)$  no son distinguibles en el receptor, y podemos asignar a todas ellas un único retardo medio,  $\mu_\tau$ , por lo que:

$$\forall n, u(t - \tau_n(t)) \approx u(t - \mu_\tau)$$

y con un desplazamiento del origen de tiempos a  $t = \mu_\tau$ , el equivalente paso bajo de la señal recibida quedará:

$$u_r(t) = u(t) \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) e^{j\phi_n(t)}$$

Y la señal recibida:

$$r(t) = \Re \left\{ u(t) e^{j2\pi f_c t} \left( \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) e^{j\phi_n(t)} \right) \right\}$$

## Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Por tanto el espectro paso bajo de la señal recibida es el de la envolvente original convuelto con el del proceso aleatorio paso bajo:

$$\chi(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) e^{j\phi_n(t)}$$

cuyas componentes en fase y cuadratura son:

$$\chi_I(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \cos \phi_n(t)$$

$$\chi_Q(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) \sin \phi_n(t)$$

Para analizar este proceso, supondremos que la variación temporal de  $N$ ,  $\alpha_n$ ,  $\tau_n$  y  $\theta_n$  es lenta respecto a los intervalos de tiempo de interés. En tal caso, los términos  $\phi_n(t)$  son:

$$\phi_n(t) = 2\pi f_c \tau_n - 2\pi f_D \cos(\theta_n) \cdot t$$

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Dos importantes suposiciones más:

- ▶ Las amplitudes  $\alpha_n$  son independientes de los retardos  $\tau_n$ .  
En particular, consideraremos que no existe una componente LOS de amplitud notablemente superior a la de las demás.
- ▶ La frecuencia de portadora  $f_c$  es tal que  $T_m f_c \gg 1$ , es decir, la dispersión de los retardos cubre un número elevado de periodos de portadora. Esta condición y la de banda estrecha se pueden expresar conjuntamente así:

$$f_c^{-1} \ll T_m \ll B^{-1}$$

Si se cumple esta condición, los términos  $2\pi f_c \tau_n$  tendrán valores completamente aleatorios, haciendo que  $\phi_n(t)$  **esté uniformemente distribuida en  $[0, 2\pi]$**  en cualquier instante.

Con  $f_c = 900$  MHz la suposición de fase uniforme se cumple tanto en interior ( $T_m \approx 50$  ns) como en exterior ( $T_m \approx 50$   $\mu$ s).

## Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

A partir de las suposiciones es inmediato comprobar las siguientes propiedades del proceso paso bajo  $\chi(t)$ :

- ▶  $\chi_I(t)$  y  $\chi_Q(t)$  son gaussianos y de media cero.
- ▶  $\chi_I(t)$  y  $\chi_Q(t)$  son incorrelados, y, por tanto, independientes.
- ▶ La autocorrelación de ambas componentes es:

$$A_{\chi_I}(t, t+\tau) = A_{\chi_Q}(t, t+\tau) = \frac{1}{2} \sum_n E[\alpha_n^2] E[\cos(2\pi f_D \tau \cos \theta_n)]$$

Observaciones importantes sobre este resultado:

- ▶  $A_\chi(t, t + \tau)$  es independiente de  $t$ , por lo que  $\chi(t)$  es estacionario.
- ▶ La potencia media de ambas componentes es  $A_{\chi_I}(0) = A_{\chi_Q}(0) = N/2E[\alpha_n^2] = P_r$ .
- ▶ Solo el término Doppler hace decrecer la correlación.

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Otras propiedades:

- ▶  $A_{\chi_I, \chi_Q}(t, t + \tau) = \frac{1}{2} \sum_n E[\alpha_n^2] E[\sin(2\pi f_D \tau \cos \theta_n)]$
- ▶ La autocorrelación de la señal paso banda recibida es:

$$A_r(\tau) = A_u(\tau) \cdot [A_{\chi_I}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + A_{\chi_I, \chi_Q}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)]$$

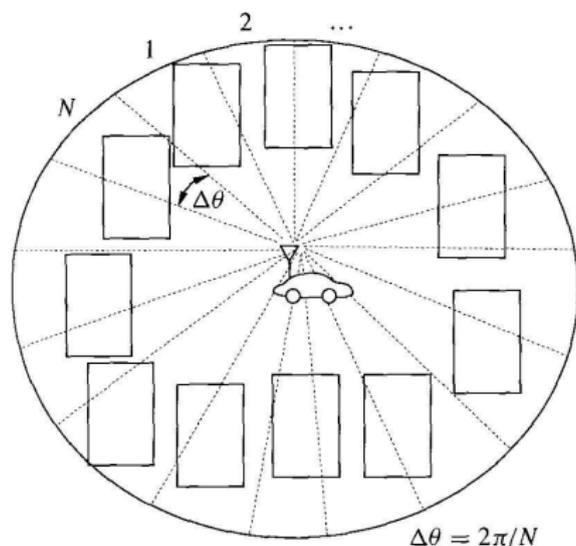
(De aquí que  $P_r = A_r(0) = A_{\chi_I}(0)$  como se mencionó en la transparencia anterior)

Claramente las propiedades de la señal recibida dependen de la distribución de los ángulos de incidencia de las distintas componentes, que determina la distribución de los desplazamientos Doppler en frecuencias.

El modelo más sencillo y utilizado es el de **entorno de dispersión denso de Clarke**

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Entorno de dispersión denso:



Los rayos proceden con igual probabilidad de todos los ángulos y rodean densamente al receptor.

## Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

En estas condiciones:

$$E [\cos (2\pi f_D \tau \cos \theta_n)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (2\pi f_D \tau \cos \theta) d\theta = J_0(2\pi f_D \tau)$$

donde  $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta$  es la función de Bessel de primera especie de orden 0.

Por tanto la autocorrelación de la componente en cuadratura  $\chi_I(t)$  es:

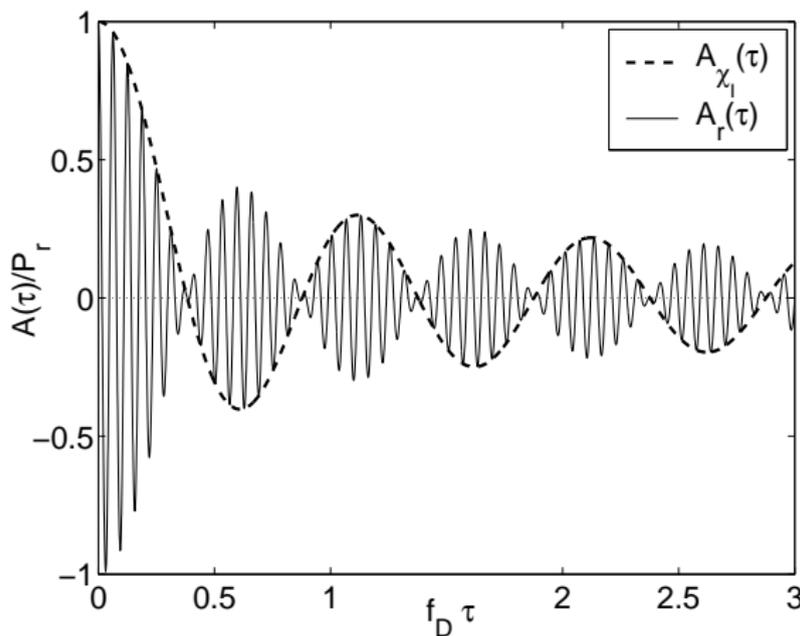
$$A_{\chi_I}(\tau) = A_{\chi_Q}(\tau) = P_r J_0(2\pi f_D \tau)$$

Análogamente se obtiene:

$$A_{\chi_I, \chi_Q}(\tau) = \frac{P_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_D \tau \cos \theta) d\theta = 0.$$

## Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

De la autocorrelación de  $\chi_I(t)$  y  $\chi_Q(t)$  se obtiene la interesante conclusión de que la envolvente de la señal se decorrela alrededor de  $f_D\tau \approx 0,4$ , o lo que es igual, en una distancia  $v\tau \approx 0,4\lambda$ . Esto es importante para el diseño de sistemas y de modelos de comunicaciones.



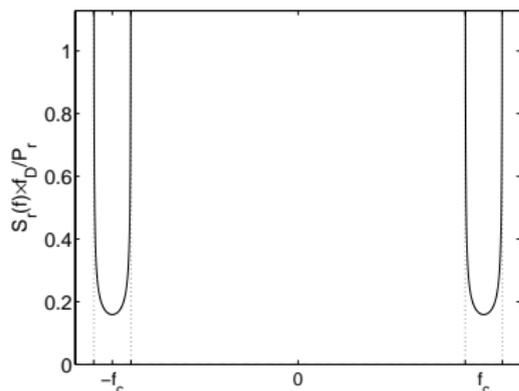
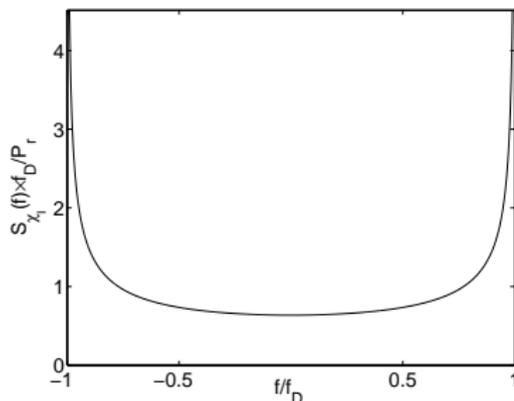
# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

El espectro de potencia de  $x_I(t)$  se puede calcular directamente:

$$S_{x_I}(f) = S_{x_Q}(f) = \mathcal{F}[A_{x_I}(\tau)] = \begin{cases} \frac{2P_r}{\pi f_D} \frac{1}{\sqrt{1-(f/f_D)^2}} & |f| \leq f_D \\ 0 & |f| > f_D \end{cases}$$

Y el de la señal recibida cuando se envía una portadora pura es:

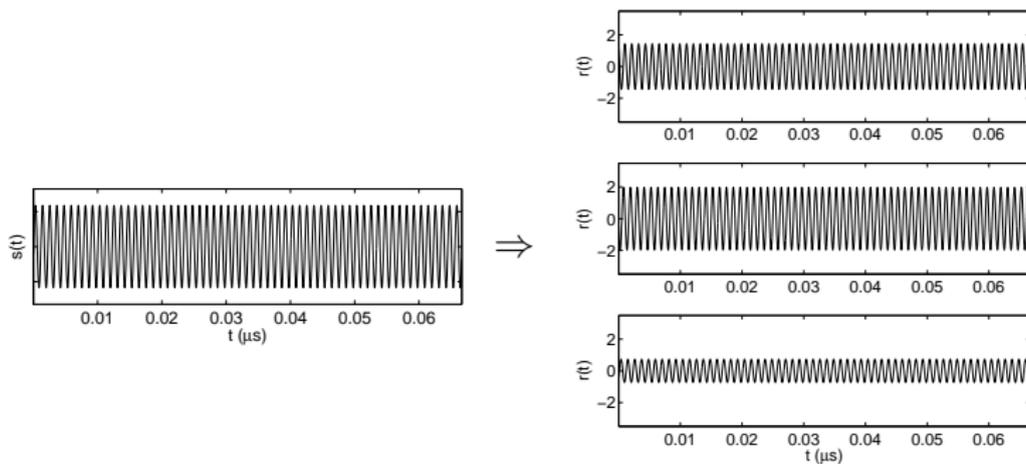
$$S_r(f) = \frac{1}{4} [S_{x_I}(f - f_c) + S_{x_I}(f + f_c)] = \begin{cases} \frac{P_r}{2\pi f_D} \frac{1}{\sqrt{1-(|f-f_c|/f_D)^2}} & |f - f_c| \leq f_D \\ 0 & |f - f_c| > f_D \end{cases}$$



# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Ejemplo: transmisión de una portadora pura.

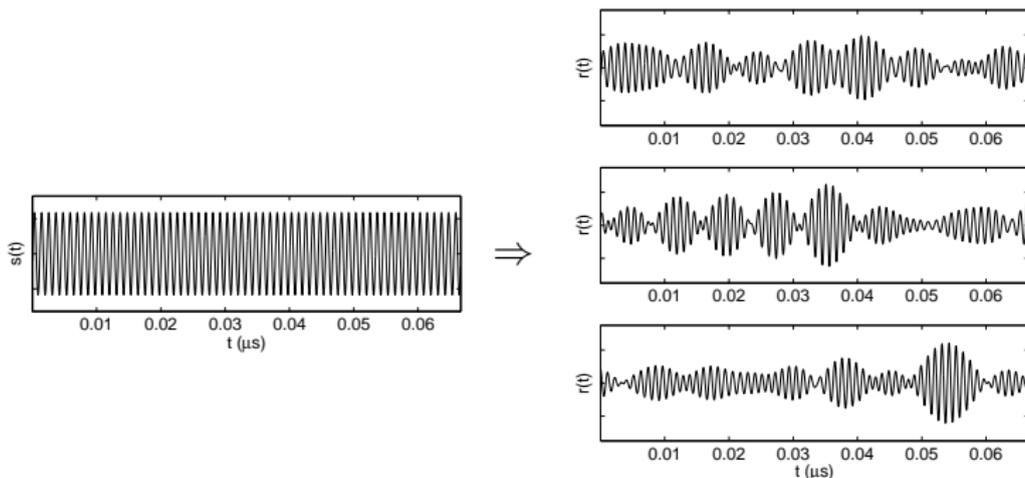
Si se transmite nada más que la portadora y el receptor se encuentra en reposo, el modelo de canal multitrayecto predice que se recibirá la propia portadora, con una amplitud aleatoria dada por la distribución de  $\sqrt{\chi_I^2 + \chi_Q^2}$ , y desfase aleatorio. Amplitud y desfase son constantes para cada realización; sólo variarán al ritmo que lo hagan los  $\alpha_n(t)$  y  $\tau_n(t)$ , lentos frente a la escala de tiempo de interés.



# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Ejemplo: transmisión de una portadora pura.

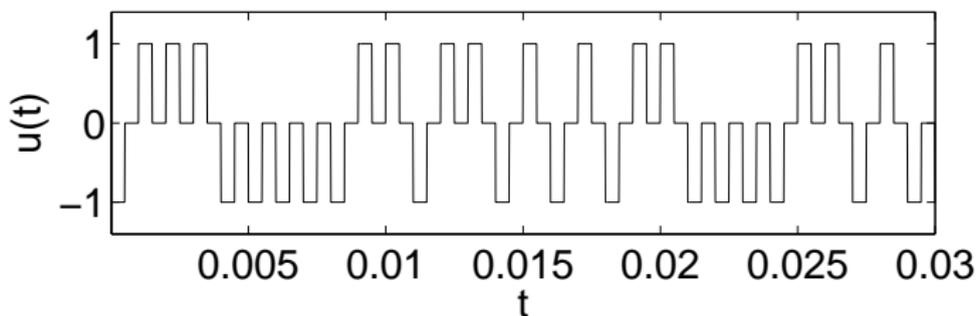
En cambio, si el receptor se encuentra en movimiento, la señal recibida es una combinación de portadoras de diferentes frecuencias (comprendidas entre  $f_c - f_D$  y  $f_c + f_D$ ) y amplitudes y desfases aleatorios, que dan lugar a una resultante cuya envolvente experimenta variaciones temporales que se decorrelan, en promedio, al cabo de un tiempo cercano a  $0,4/f_D$ .



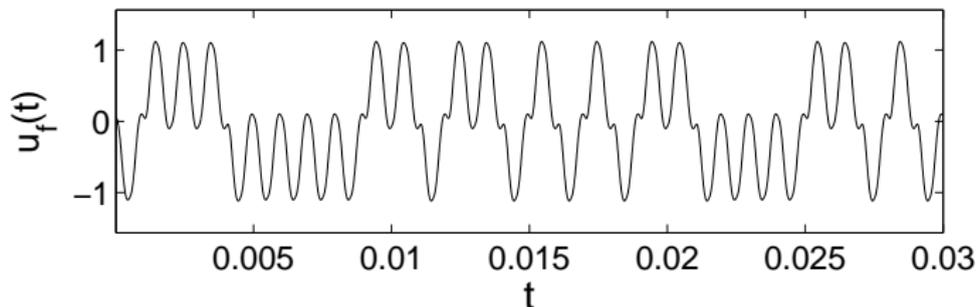
# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Otro ejemplo: transmisión de un tren de pulsos.

Tren de pulsos original ( $T_b = 1$  Kbps):



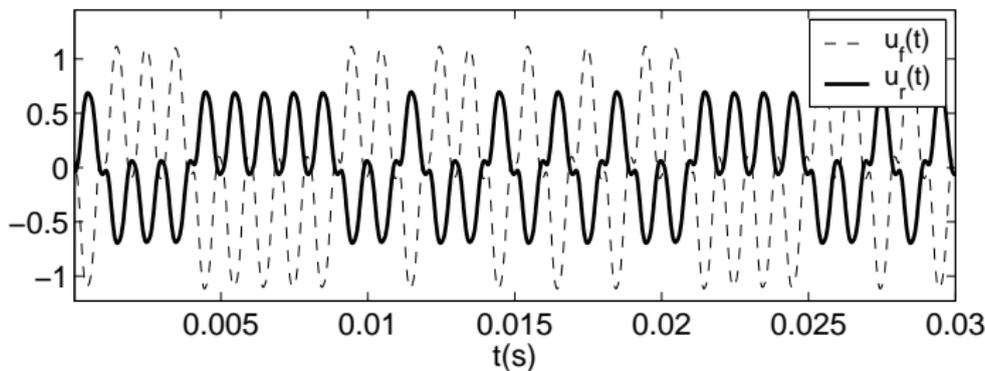
Tren de pulsos filtrado a 2 KHz:



# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Otro ejemplo: transmisión de un tren de pulsos.

La señal recibida cuando el receptor está quieto es idéntica a la enviada, salvo que está multiplicada por una portadora a frecuencia  $f_c$  con amplitud y fase aleatorias (pero fijas).

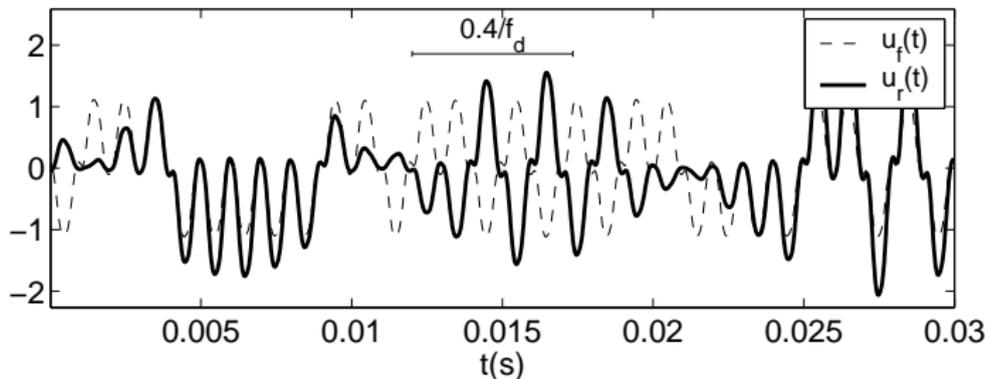


Nótese que en esta figura hemos prescindido de la portadora

## Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Otro ejemplo: transmisión de un tren de pulsos.

En cambio con el receptor en movimiento la señal recibida está modulada por una envolvente cuya autocorrelación se pierde en tiempos del orden de  $0,4/f_D$ . En este ejemplo,  $v = 25$  m/s y  $f_c = 900$  MHz, con lo que  $f_d = 75$  Hz y el tiempo de decorrelación es  $\tau = 5/3$  ms.



En esta figura también hemos prescindido de la portadora

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Un código MATLAB para simular desvanecimientos multitrayecto de banda estrecha:

```
fc=9e8; % portadora a 900 MHz (solo se usa para calcular fd)
v=25; % 90 km/h
c=3e8;
Bw=2e3; % ancho de banda de señal: 2 KHz
fs=50*Bw; % frecuencia de muestreo
N=100; % numero de señales a mezclar
fd=v*fc/c;

% Creamos la señal a transmitir: un tren de pulsos
nsimbolos=30;nsamples=(2*nsimbolos/Bw)*fs;
t=(1:nsamples)/fs;
T=2/Bw; % periodo de simbolo
D=(t(1):T:max(t))';
D=[D,unidrnd(2,size(D))*2-3];
u=pulstran(t,D,ones(1,T*fs/2),fs);
wcutoff=2*Bw/fs; [b,a]=butter(4,wcutoff);uf=filter(b,a,u);

u_r=zeros(1,nsamples); % envolvente compleja recibida
alpha=rand(1,N); % amplitud de cada rayo
for i=1:N
    phi0=2*pi*rand; % fase aleatoria
    theta=2*pi*rand; % angulo de incidencia
    tau=rand*0.1/Bw; % retardo aleatorio pequeño frente a 1/Bw
    u_r=u_r+alpha(i)*uf.*exp(j*(2*pi*fc*tau-2*pi*fd*cos(theta)*t-phi0));
end
u_r=sqrt(2)*u_r/(sqrt((sum(alpha.^2)))); % normalizamos la potencia
```

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Estadísticas de la envolvente:

Recordemos que la envolvente de la señal recibida es la de la señal original multiplicada por:

$$z(t) = |\chi(t)| = \sqrt{\chi_I^2(t) + \chi_Q^2(t)}$$

Dado que  $\chi_I$  y  $\chi_Q$  son procesos gaussianos e incorrelados, sabemos (transparencia 9) que la envolvente sigue una distribución tipo Rayleigh:

$$f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = \frac{2z}{\bar{P}_r} e^{-\frac{z^2}{\bar{P}_r}}$$

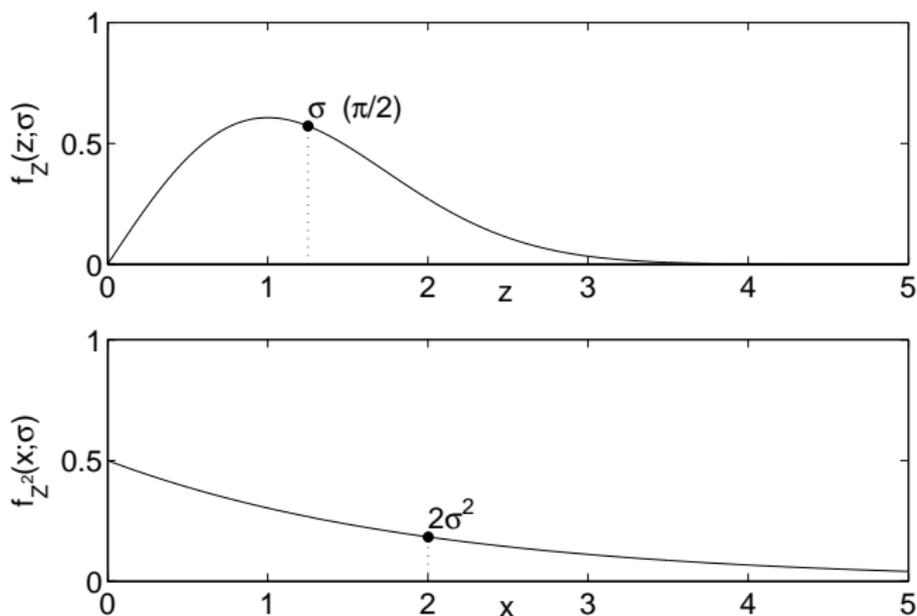
donde  $\bar{P}_r = 2\sigma^2 = E[z^2]$  es la potencia media *recuperada de la envolvente*. Notar que  $\bar{P}_r = 2P_r$ .

La potencia instantánea  $z^2(t)$  se distribuye exponencialmente:

$$f_{Z^2}(x) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\bar{P}_r} e^{-\frac{x}{\bar{P}_r}}$$

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Densidades de probabilidad de envolvente y potencia:



Ambas distribuciones dependen de un único parámetro. Por tanto la dispersión de la potencia recibida depende exclusivamente del valor de dicha potencia.

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

Ejemplo: en un canal con desvanecimiento tipo Rayleigh la potencia media recibida es de 20 dBm. ¿Cuál es la probabilidad en un instante cualquiera de que la potencia recibida esté por debajo de 10 dBm?

Solución: se nos proporciona  $\bar{P}_r = 20 \text{ dBm} = 100 \text{ mW}$ . Se nos pide hallar la probabilidad de que  $z^2(t) < 10 \text{ dBm} = 10 \text{ mW}$ . Esta probabilidad es:

$$p(Z^2 < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx = 0,095$$

En general,

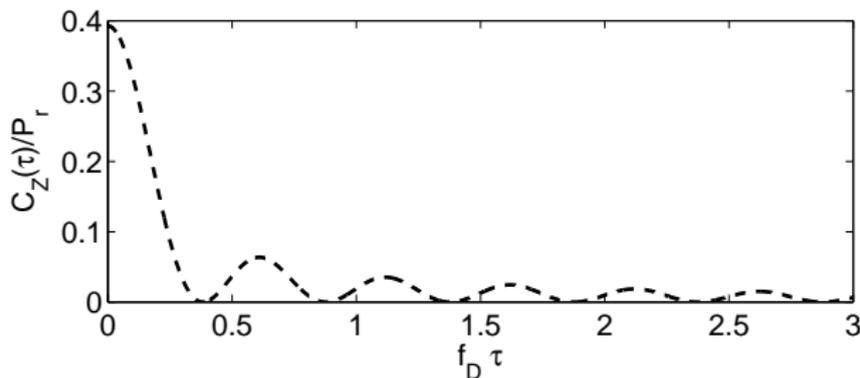
$$p(Z^2 < P_{min}) = 1 - e^{-P_{min}/\bar{P}_r}$$

Es decir, la probabilidad de que la potencia recibida quede por debajo de un umbral dado depende sólo de la diferencia en dBs entre el umbral y la potencia media.

## Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

La evolución temporal de la envolvente se puede caracterizar a partir de  $A_{X_I}(\tau)$ . Se demuestra que la autocovarianza de la envolvente es, aproximadamente:

$$C_z(\tau) = \frac{\pi}{8A_{X_I}(0)} A_{X_I}^2(\tau)$$



Esto prueba que el tiempo de decorrelación de la envolvente es el mismo que el de las componentes en fase y cuadratura correspondientes.

# Desvanecimiento multirayecto de banda estrecha

## El caso LOS

Si existe una componente de visión directa, su potencia es en general notablemente superior a la de los rayos dispersados. Entonces la señal recibida será:

$$\begin{aligned} r(t) &= \Re \left\{ u(t) e^{j2\pi f_c t} \left( \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N(t)} \alpha_n(t) e^{j\phi_n(t)} \right) \right\} = \\ &= \Re \left\{ u(t) e^{j2\pi f_c t} (\alpha_0 + \chi(t)) \right\} \end{aligned}$$

Por tanto la envolvente y fase recibidas, si  $u(t)$  es un tono puro, valen:

$$z(t) = \sqrt{(\alpha_0 + \chi_I(t))^2 + \chi_Q^2(t)} \quad \theta(t) = \arctan \frac{\chi_Q(t)}{\alpha_0 + \chi_I(t)}$$

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

## El caso LOS

Es sencillo probar entonces que la distribución conjunta de  $z$  y  $\theta$  es:

$$f_{Z,\Theta}(z, \theta) = \frac{z}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2+s^2-2zs \cos \theta}{2\sigma^2}}$$

donde  $s^2 = \alpha_0^2$  es la potencia de la componente LOS. Por tanto la distribución de amplitudes de la envolvente es:

$$f_Z(z) = \int_0^{2\pi} f_{Z,\Theta}(z, \theta) d\theta = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{zs}{\sigma^2}\right)$$

donde  $I_0(x) = J_0(ix)$  es la función de Bessel modificada de primera especie de orden 0. Esta distribución se conoce como **distribución de Rice**. La potencia media extraída de la envolvente es  $\bar{P}_r = E[z^2] = s^2 + 2\sigma^2$ , como cabía esperar.

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

## El caso LOS

Es habitual escribir la distribución de Rice en términos del parámetro:

$$K = \frac{s^2}{2\sigma^2} \quad \text{ó} \quad K_{dB} = 10 \log_{10} \frac{s^2}{2\sigma^2},$$

es decir, la razón de potencias de la componente LOS y la componente de dispersión. En términos de  $K$  y la potencia total recibida, la distribución de amplitud de la envolvente es:

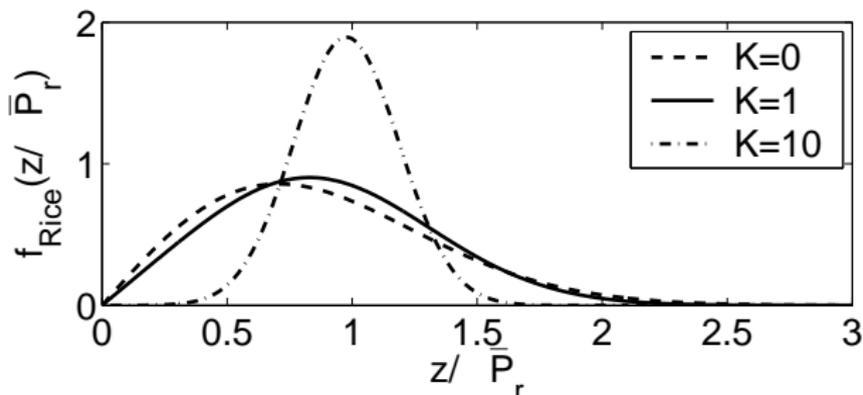
$$p_Z(z) = \frac{2z(K+1)}{\bar{P}_r} e^{-K - \frac{(K+1)z^2}{\bar{P}_r}} I_0 \left( 2z \sqrt{\frac{K(K+1)}{\bar{P}_r}} \right)$$

Notemos que  $K = 0$  corresponde al caso Rayleigh mientras que  $K \gg 1$  corresponde a una señal prácticamente determinista.

# Desvanecimiento multitrayecto de banda estrecha

## El caso LOS

Distribución de Rice para distintos valores de  $K$ :



Notemos que incluso si la potencia del rayo de visión directa es 10 veces mayor que la de la componente dispersada, la distribución de potencias recibidas es ancha.

## Tasa y duración media de desvanecimiento

Las estadísticas sobre la amplitud y potencia de la envolvente nos permiten calcular la probabilidad de desvanecimiento promedio, pero no informan sobre la correlación temporal de estos sucesos.

Dos parámetros muy importantes que caracterizan la calidad de un enlace móvil y que dependen de la correlación temporal de los desvanecimientos son:

- ▶ La *tasa de desvanecimientos*, es decir, el número de veces por segundo que la envolvente queda por debajo del umbral de detección del receptor.
- ▶ La *duración media de los desvanecimientos*.

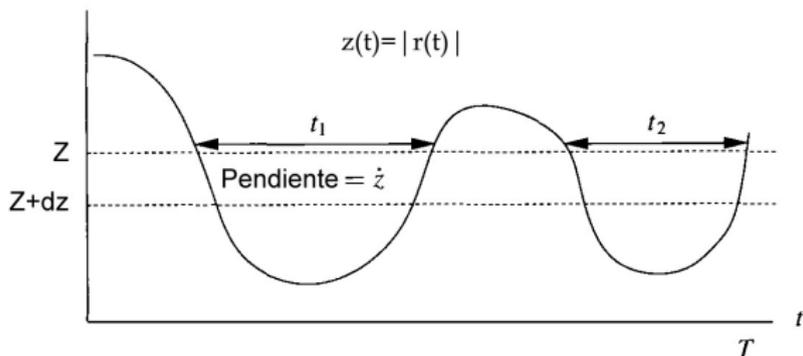
## Tasa y duración media de desvanecimiento

Si  $f_{Z,\dot{z}}(z, \dot{z})$  es la densidad de probabilidad de encontrar la amplitud de la envolvente con un valor  $z$  y una tasa de variación  $\dot{z}$ , el número de veces por unidad de tiempo que la envolvente cruzará en sentido negativo el nivel  $z = Z$  es:

$$L_Z = \int_{-\infty}^0 \dot{z} f_{Z,\dot{z}}(Z, \dot{z}) d\dot{z}$$

Esto es precisamente la tasa de desvanecimientos, si el nivel de detección es  $Z$ . La duración media de los desvanecimientos es:

$$\bar{t}_Z = \frac{p(z(t) < Z)}{L_Z}.$$



## Tasa y duración media de desvanecimiento

En el artículo clásico [Rice44] se obtienen expresiones apropiadas para  $p(z, \dot{z})$ . De ellas se deduce que, en el caso de desvanecimiento tipo Rice,

$$L_Z = \sqrt{2\pi(K+1)}f_D\rho e^{-K-(K+1)\rho^2} I_0\left(2\rho\sqrt{K(K+1)}\right),$$

donde  $\rho = Z/\sqrt{P_r}$ . Como era de esperar, la tasa de desvanecimientos depende no sólo de  $K$ , sino también del corrimiento Doppler  $f_D$ .

Para  $K = 0$  (caso Rayleigh, sin LOS) la expresión se simplifica a:

$$L_{Z,\text{Rayleigh}} = \sqrt{2\pi}f_D\rho e^{-\rho^2}.$$

En este último caso,  $p(z(t) < Z) = 1 - e^{-\rho^2}$ , y la duración media de los desvanecimientos tiene una expresión sencilla:

$$\bar{t}_{Z,\text{Rayleigh}} = \frac{e^{\rho^2} - 1}{\sqrt{2\pi}f_D\rho}$$

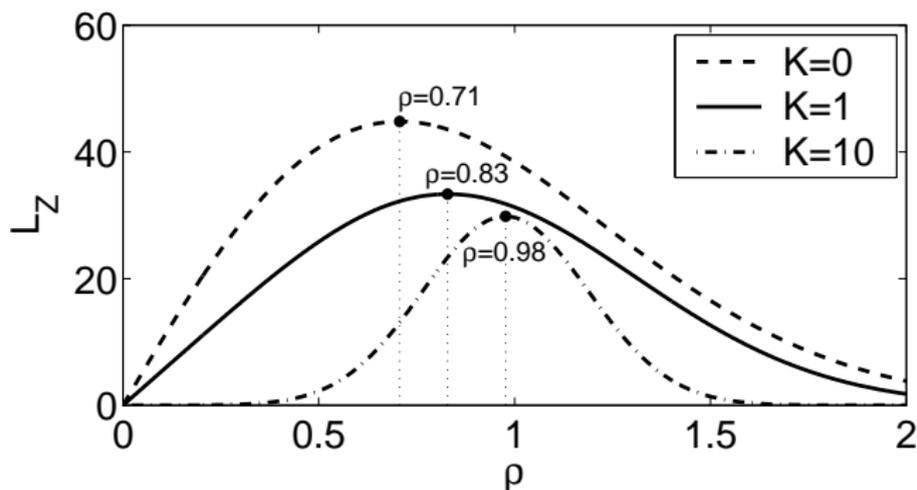
# Tasa y duración media de desvanecimiento

Ejemplo: se va a medir la tasa de desvanecimiento rápido de una portadora de telefonía móvil a 900 MHz en un área urbana.

- ▶ Suponiendo que no hay línea de visión directa entre la estación base y el receptor, ¿cuál es la diferencia en dB entre el umbral de detección y el nivel *rms* de señal que produce la mayor tasa de desvanecimientos?
- ▶ Para ese umbral, ¿cuántos desvanecimientos por minuto debemos esperar, si las medidas se efectúan en un vehículo a 50 km/h?
- ▶ Al entrar en una determinada calle se detecta que la potencia recibida, en promedio, se ha duplicado súbitamente, deduciéndose que ahora recibimos una componente de visión directa de la portadora. Repetir las dos cuestiones anteriores en esta nueva situación.

# Tasa y duración media de desvanecimiento

Solución:



Cuando la componente LOS es muy dominante, la máxima tasa de desvanecimiento se produce cuando el umbral de detección es muy próximo a la potencia media recibida.

Otra cuestión: ¿qué umbral produce la mínima duración media de los desvanecimientos?

# Tasa y duración media de desvanecimiento

Ejemplo: calcular la duración promedio de los desvanecimientos para una portadora a 900 MHz y un móvil desplazándose a 90 km/h sin línea de visión directa, para los casos:

- ▶ Umbral al mismo nivel que la potencia media recibida.
- ▶ Umbral 20 dB por debajo de la potencia media recibida.
- ▶ Umbral 40 dB por debajo de la potencia media recibida.

Respuestas:

- ▶  $\bar{t}_{Z,0dB} = 9,14 \text{ ms}$
- ▶  $\bar{t}_{Z,20dB} = 535 \mu\text{s}$
- ▶  $\bar{t}_{Z,40dB} = 53,2 \mu\text{s}$

## Otros modelos de desvanecimiento

La **distribución  $m$  de Nakagami** proporciona un buen ajuste de medidas empíricas de desvanecimiento en varios entornos. La densidad de probabilidad de la amplitud de la envolvente en este modelo es:

$$f_Z(z; m) = \frac{2m^m z^{2m-1}}{\Gamma(m) \bar{P}_r^m} e^{-\frac{mz^2}{\bar{P}_r}}; \quad m \geq \frac{1}{2}, x > 0,$$

donde  $\Gamma(x)$  es la función gamma de Euler.

Para  $m = 1$  la distribución de Nakagami coincide con la de Rayleigh; para  $m = (K + 1)^2 / (2K + 1) > 1$  es aproximadamente igual que la de Rice. Para  $m < 1$  no corresponde a ninguna de las dos, y representa un canal con rendimiento más bajo aún que el de Rayleigh. El caso extremo,  $m = 1/2$ , corresponde a una distribución gaussiana unilateral.



## Otros modelos de desvanecimiento

La **distribución de Suzuki** combina la distribución de Rayleigh de parámetro  $\sigma$  con una distribución log-normal de la propia  $\sigma$ , con dispersión  $\sigma_{dB}$ :

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \frac{10}{\sigma \ln 10 \sigma_{dB} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(10 \log_{10} \sigma - \sigma_{0,dB})^2}{2\sigma_{dB}^2}} d\sigma$$

donde  $\sigma_{0,dB}$  no es sino la potencia media predicha en el modelo de desvanecimiento por sombra (en términos de las transparencias de la clase anterior,  $\sigma_{0,dB} = \mu_{dB}$ ). Más a menudo se emplea su equivalente en dBs:

$$f_{Z_{dB}}(z_{dB}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln 10}{10} \exp \left[ \frac{\ln 10}{10} (z_{dB} - F_R) - e^{\frac{\ln 10}{10} (z_{dB} - F_R)} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} 20 \sigma_{dB}} e^{-\frac{(F_R - F_S + 400 \ln(10) \sigma_{dB}^2)^2}{800 \sigma_{dB}^2}} dF_R$$

con  $F_R = 20 \log(\sqrt{2}\sigma)$ ,  $Z_{dB} = 20 \log Z$  y  $F_S = 20 \log[\sqrt{2}\sigma_{0,dB} e^{2 \ln^2(10) \sigma_{dB}^2}]$ .

## Otros modelos de desvanecimiento

La distribución de Suzuki proporciona un ajuste excelente a medidas empíricas en entornos edificados. Para aplicar la distribución, sus parámetros se estiman a partir de medidas empíricas de potencia. Los parámetros estimados son:

$$\hat{\sigma}_{dB} = \frac{1}{20} \sqrt{\hat{u}_2 - 31,025}$$

$$\hat{F}_S = \hat{z}_{dB} + 2,51 - 44\hat{\sigma}_{dB}^2$$

donde  $\hat{u}_2$  es la varianza de las medidas de potencia recibida (en dBs) y  $\hat{z}_{dB}$  es su media.

# Bibliografía

## Básica:

- ▶ J.D. Parson, *The Mobile Radio Channel*, Wiley, 2000
- ▶ A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cap. 2. Cambridge University Press, 2005

## Complementaria:

- ▶ R. H. Clarke, *A statistical theory of mobile radio reception*, Bell System Tech. J., 957-1000, 1968.
- ▶ W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, Wiley 1974.
- ▶ S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J., 282-333, 1944 y 46-156, 1945.
- ▶ P. A. Bello, *Characterization of randomly time-variant lineal channels*, IEEE Trans. Commun. Syst., 360-393, 1963.
- ▶ M. Nakagami, *The m-distribution. A general formula of intensity distribution of rapid fading*, en *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, ed. W. C. Hoffman, Pergamon, 1960.
- ▶ R. W. Lorenz, *Theoretical distribution functions of multipath fading processes in mobile radio and determination of their parameters by measurements*, Technischer Bericht 455, 66, Forschungsinstitut der Deutschen Bundespost, 1978.
- ▶ A. M. Chen y R. R. Rao, *On tratable wireless channel models*, Proc. Internat. Sympos. Pers., Indoor, Mobile Radio Commun, 825-830, 1998.