

# Modelos de Propagacion electromagnética

## Modelos estocásticos de propagación (1)

Alexandre Wagemakers y Borja Ibarz

27 de noviembre de 2007

# Atenuación por sombra

Plan de la clase:

- ▶ Introducción
- ▶ Variables aleatorias log-normales
- ▶ Modelo log-normal de atenuación por sombra
- ▶ Correlación espacial de la atenuación por sombra
- ▶ Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

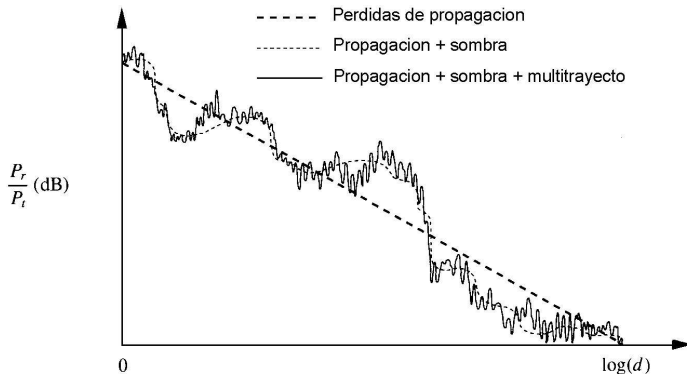
# Introducción

Los modelos de las clases anteriores proporcionan promedios estadísticos de pérdidas de potencia de señal en función de la distancia y parámetros generales del entorno, el emisor y el receptor. Con todos estos parámetros fijos, las características de la señal recibida varían en el tiempo y el espacio de una forma difícil de predecir con exactitud. Por eso es útil considerar la señal como un proceso estocástico; las propiedades de este proceso proporcionan información útil para el diseño de la red.

En esta clase introducimos un modelo sencillo que recoge la variabilidad espacial de la potencia recibida debida a la distribución irregular de obstáculos en el trayecto de la señal.

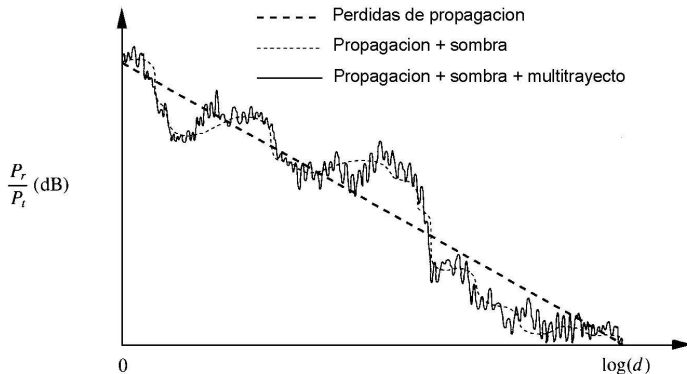
# Introducción

La potencia recibida fluctúa en torno a la predicha por los modelos de pérdidas de propagación media debido a dos fenómenos que se pueden tratar independientemente: **desvanecimiento por sombra**, y **desvanecimientos por multitrayecto**.



# Introducción

Los **desvanecimientos por multitrayecto** son un fenómeno dinámico que se modela mediante procesos estocásticos. El **desvanecimiento por sombra** es más bien estático y se modela mediante una variable aleatoria *log-normal*.



# Variables aleatorias log-normales

*Definición:* una variable aleatoria es log-normal si su logaritmo sigue una distribución normal.

$$X \text{ log-normal} \Leftrightarrow \log(X) \text{ normal}$$

En comunicaciones las variables log-normales de interés son potencias o razones de potencias (atenuación) cuya medida en dBs (dBm, dBW, etc.) sigue una distribución normal.

$$X \text{ log-normal} \Leftrightarrow X_{dB} \sim \mathcal{N}(\mu_{X_{dB}}, \sigma_{X_{dB}})$$

## Variables aleatorias log-normales

Puesto que

$$X_{dB} = 10 \log_{10}(X)$$

y la función de densidad de probabilidad de  $X_{dB}$  es:

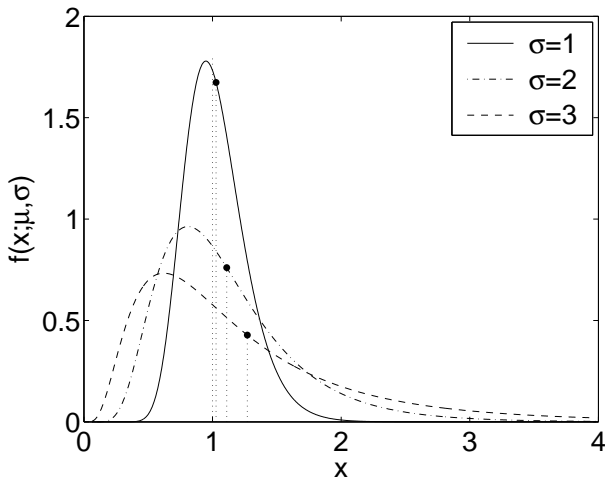
$$\mathcal{N}(x; \mu_{X_{dB}}, \sigma_{X_{dB}}) = \frac{1}{\sigma_{X_{dB}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu_{X_{dB}})^2}{2\sigma_{X_{dB}}^2}}$$

se deduce que la función de densidad de probabilidad de una variable log-normal  $X$  es:

$$\begin{aligned} f(x; \mu, \sigma) &= \frac{d(10 \log_{10} x)}{dx} \mathcal{N}(10 \log_{10} x; \mu, \sigma) = \\ &= \frac{10}{x \ln 10} \frac{1}{\sigma_{X_{dB}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(10 \log_{10} x - \mu_{X_{dB}})^2}{2\sigma_{X_{dB}}^2}} \end{aligned}$$

## Variables aleatorias log-normales

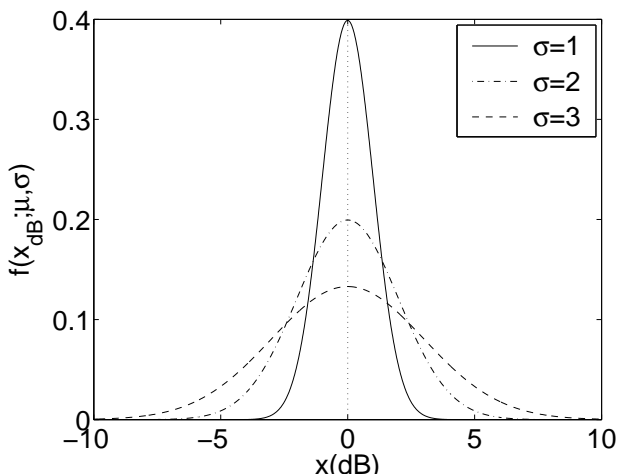
Ejemplo: densidad de probabilidad de una atenuación log-normal de parámetros  $\mu_{X_{dB}} = 0$  dB y  $\sigma_{X_{dB}} = 1, 2, 3$  dB:





## Variables aleatorias log-normales

Ejemplo: densidad de probabilidad de la misma atenuación, en dBs:



## Variables aleatorias log-normales

¡Cuidado! Si  $X$  es log-normal, NO se cumple que  $\mu_{X_{dB}} = 10 \log_{10} E(X)$ . La media de una variable log-normal es:

$$E[X] = 10^{\frac{\mu_{X_{dB}}}{10} + \frac{\ln 10}{2} \left(\frac{\sigma_{X_{dB}}}{10}\right)^2}$$

La media de la variable log-normal siempre está por encima de la potencia que corresponde a la media en dBs. En cambio, la media geométrica coincide con la que corresponde a la media de la variable en dBs.

Aunque los parámetros que definen la distribución log-normal son siempre  $\mu_{X_{dB}}$  y  $\sigma_{X_{dB}}$ , no corresponden a la media y desviación típica (en dBs) de la propia variable, sino a la media y desviación típica de su equivalente en dBs.

## Modelo log-normal de atenuación por sombra

Las señales que se propagan en entornos irregulares (sea suburbano, urbano, microcelular o de interior) deben atravesar, difractarse o reflejarse en un elevado número de obstáculos antes de llegar al receptor.

Cada uno de estos obstáculos introduce un factor de atenuación aleatorio:

$$P_{r,j} = P_{i,j}10^{-d_j/10}$$

donde  $P_{r,j}$  representa la potencia reflejada, transmitida o difractada por el  $j$ -ésimo obstáculo,  $P_{i,j}$  la potencia incidente sobre ese obstáculo, y  $d_j$  las pérdidas debidas al obstáculo, en dBs.

## Modelo log-normal de atenuación por sombra

El producto de todos estos factores proporciona la potencia recibida:

$$P_r = P_t \prod_j 10^{-d_j/10} = P_t 10^{-\sum_j d_j/10}$$

Y por tanto las pérdidas en el enlace son:

$$L(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{P_t}{P_r} = \sum_j d_j$$

Si consideramos las pérdidas en cada obstáculo como aleatorias e independientes unas de otras, el teorema del límite central permite concluir que **las pérdidas, en dBs, son una variable aleatoria con distribución normal.**

# Modelo log-normal de atenuación por sombra

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- ▶ Las pérdidas en un enlace, en dBs, siguen una distribución normal de media  $\mu_{L_{dB}}$  y desviación típica  $\sigma_{L_{dB}}$ .
- ▶ Las pérdidas medidas como razón entre potencia emitida y recibida siguen una distribución log-normal de parámetros  $\mu_{L_{dB}}$  y  $\sigma_{L_{dB}}$ .
- ▶ La potencia recibida, en dBm, sigue una distribución normal de media  $P_t(\text{dBm}) - \mu_{L_{dB}}$  y desviación típica  $\sigma_{L_{dB}}$ .
- ▶ La potencia recibida, en milivatios, sigue una distribución log-normal de parámetros  $P_t(\text{dBm}) - \mu_{L_{dB}}$  y  $\sigma_{L_{dB}}$ .

Los modelos de pérdidas de propagación estudiados en clases anteriores permiten calcular el parámetro  $\mu_{L_{dB}}$ . Los valores de  $\sigma_{L_{dB}}$  se obtienen de medidas empíricas.

## Modelo log-normal de atenuación por sombra

Habitualmente la atenuación por sombra se añade al valor determinista de la atenuación promedio, con lo que la media de la atenuación por sombra queda absorbida en dicho valor determinista y la media de la variable log-normal en dBs es siempre 0. Así, un modelo empírico típico que incluya atenuación por sombra puede venir caracterizado por una ecuación:

$$L(dB) = -10 \log_{10} K + 10\gamma \log_{10} \frac{d}{d_0} + \psi_{dB}$$

donde  $\psi_{dB}$  es el término de atenuación por sombra, de media 0 dB y varianza  $\sigma_{L_{dB}}$ .

# Modelo log-normal de atenuación por sombra

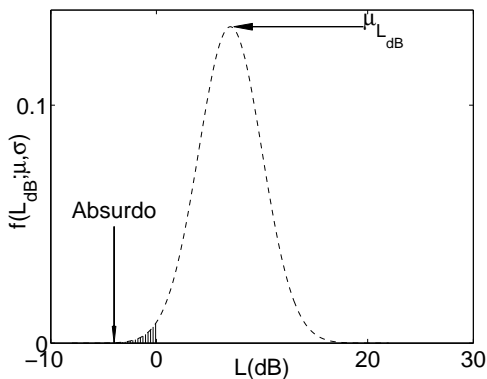
Algunos valores empíricos de  $\sigma_{L_{dB}}$ :

Entorno	$\sigma_{L_{dB}}$
Suburbano escabroso con densidad forestal alta	10.6
Suburbano escabroso con densidad forestal baja o llano con densidad forestal alta	9.6
Suburbano llano con densidad forestal baja	8.2
Microcelular, LOS	7.9-8.8
Microcelular, NLOS	7.7-9.3
Oficina	7-14
Fábrica LOS	3-7
Fábrica NLOS	7-10
Hogar	7

Referencias: Erceg et al, IEEE J. Sel. Areas Commun., 1205-11, 1999; Anderson et al, IEEE Comm. Magazine, 1994; Feuerstein et al, IEEE Trans. on Vehicular Techn., 487-498, 1994.

## Modelo log-normal de atenuación por sombra

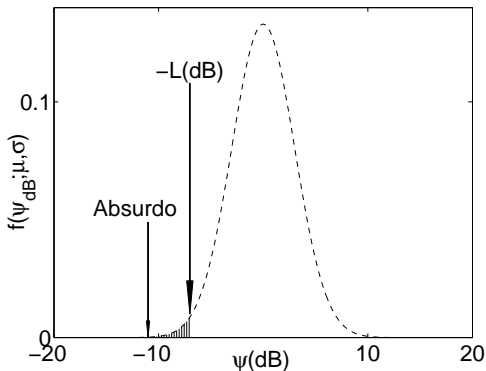
Atención: el modelo log-normal de atenuación tiene validez limitada. La atenuación nunca puede ser inferior a 0 dB, mientras que la distribución normal de la atenuación en dBs permite valores negativos.





## Modelo log-normal de atenuación por sombra

Equivalentemente, si se usa una variable de atenuación por sombra de media 0 dB, su valor nunca debería poder ser inferior al opuesto del valor determinista de la atenuación.



El modelo log-normal es tanto más válido cuanto menor es  $\sigma_{L_{dB}}$  respecto a  $\mu_{L_{dB}}$  (o, alternativamente, respecto al valor determinista de las pérdidas).

## Modelo log-normal de atenuación por sombra

Para obtener un valor empírico de  $\sigma_{L_{dB}}$  se realizan medidas de potencia recibida y se obtiene su desviación típica *a partir de los valores en dBs*.

**Ejemplo:** se trata de ajustar las siguientes medidas de atenuación:

Distancia	L (dB)
10 m	70 dB
20 m	75 dB
50 m	90 dB
100 m	110 dB
300 m	125 dB

a un modelo de tipo:

$$L(\text{dB}) = 31,54 + 10\gamma \log_{10} d(\text{m}) + \psi_{\text{dB}}$$

donde  $\psi_{\text{dB}}$  es normal de media cero y  $\gamma = 3,71$ . ¿Cuál debe ser la desviación típica  $\sigma_{\psi_{\text{dB}}}$ ?

## Correlación espacial de la atenuación por sombra

El modelo de atenuación expuesto da la probabilidad de medir una determinada atenuación a una cierta distancia del emisor, pero no informa sobre la correlación espacial de estas atenuaciones. Si en un punto del espacio la atenuación tiene un cierto valor, es de esperar que en puntos próximos su valor sea parecido.

El modelo de autocorrelación más sencillo y más utilizado supone que *la atenuación adicional por sombra*  $\psi_{dB}(\vec{r})$  es un proceso autorregresivo de primer orden, de modo que la covarianza entre atenuaciones en dos puntos del espacio  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  separados una distancia  $\delta$  es:

$$A(\delta) = E[\psi_{dB}(\vec{a}) \cdot \psi_{dB}(\vec{b})] = \sigma_{\psi_{dB}}^2 \rho_D^{\delta/D}$$

donde  $\rho_D$  es la covarianza normalizada entre dos puntos separados una distancia  $\delta = D$ . Con esta parametrización es fácil determinar empíricamente  $\rho_D$  y  $D$ .

# Correlación espacial de la atenuación por sombra

Algunos valores empíricos de  $\rho_D$  y  $D$ :

Entorno	$f_c$	$\rho_D, D$
Macro célula suburbana	900 MHz	$\rho_D = 0,82$ para $D = 100$ m
Micro célula urbana	2 GHz	$\rho_D = 0,3$ para $D = 10$ m

Es habitual fijar  $D$  como la distancia a la cual la correlación cae en un factor  $1/e$ , con lo que queda un único parámetro,  $X_c$ , llamado *distancia de decorrelación*:

$$A(\delta) = \sigma_{\psi_{dB}}^2 e^{-\delta/X_c}$$

Obviamente,  $X_c = -D / \ln \rho_D$ , así que:

Entorno	$f_c$	$X_c$
Macro célula suburbana	900 MHz	$\approx 500$ m
Micro célula urbana	2 GHz	$\approx 10$ m

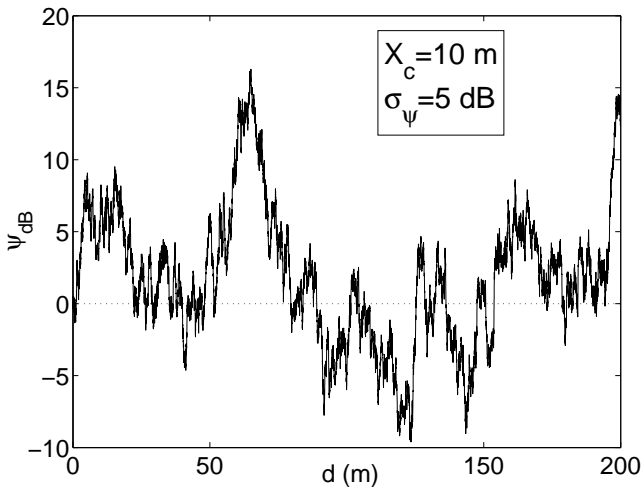
# Correlación espacial de la atenuación por sombra

Simulación de un proceso de atenuación por sombra:

```
npoints=10000;  
Xc=10; % distancia de correlación  
sigma_dB=5;  
d=linspace(0,20*Xc,npoints);  
d_sample=d(2)-d(1);  
  
n=randn(1,npoints);  
a=exp(-d_sample/Xc);  
psi=sigma_dB*filter(sqrt(1-a^2),[1,-a],n);
```

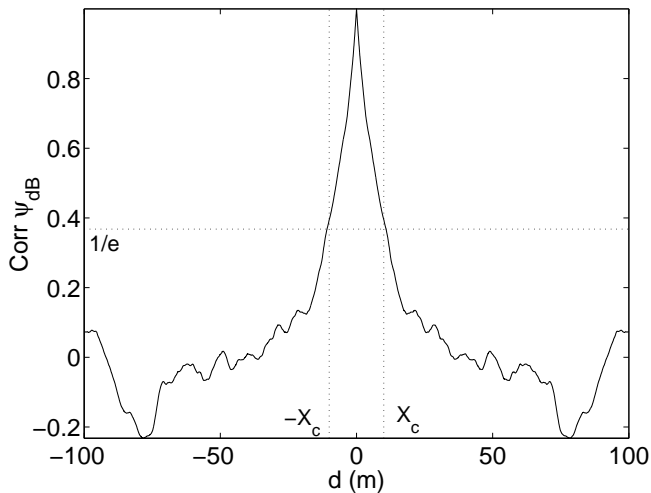
# Correlación espacial de la atenuación por sombra

Simulación de un proceso de atenuación por sombra:



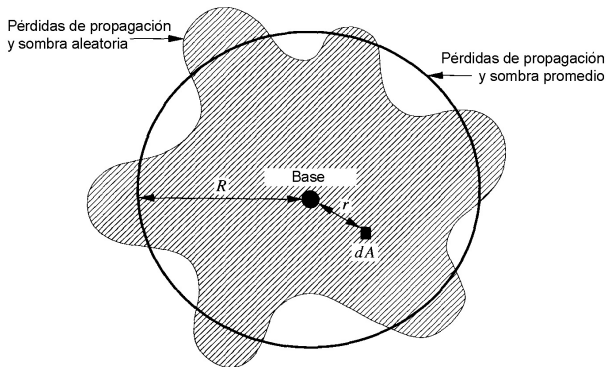
# Correlación espacial de la atenuación por sombra

Simulación de un proceso de atenuación por sombra:



## Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

La atenuación por sombra tiene importantes repercusiones en el diseño de sistemas inalámbricos. Dada la naturaleza aleatoria de la potencia recibida, no es posible conocer con precisión hasta qué distancia del emisor se recibirá la señal con una potencia suficiente para permitir la comunicación.





## Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

Se llama **probabilidad de corte** (outage) para una distancia  $d$  a la probabilidad de que la potencia recibida  $P_r$  a esa distancia quede por debajo del umbral de recepción  $P_{min}$ .

$$p_{out}(P_{min}, d) = Prob \{P_r(d) < P_{min}\}$$

Como sabemos, la potencia recibida se puede descomponer en una potencia promedio y un término de atenuación por sombra:

$$P_r(d) = \bar{P}_r(d) - \psi_{dB}$$

siendo  $\bar{P}_r(d) = P_t - L_{dB}(d)$  (en unidades logarítmicas).

Llamando  $\overline{\Delta P}(P_{min}, d) = \bar{P}_r(d) - P_{min}$  al margen, en dBs, de la potencia promedio recibida sobre el umbral de detección podemos escribir la probabilidad de corte como:

$$p_{out}(P_{min}, d) = Prob \{ \psi_{dB} > \overline{\Delta P}(P_{min}, d) \}$$

# Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

Bajo el modelo log-normal es inmediato comprobar que esta probabilidad es:

$$p_{out}(P_{min}, d) = Q\left(\frac{\overline{\Delta P}(P_{min}, d)}{\sigma_{\psi_{dB}}}\right)$$

donde  $Q(z)$  es la probabilidad de que una variable  $\mathcal{N}(0, 1)$  sea mayor que  $z$ , es decir:

$$Q(z) = \int_z^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

## Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

Ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de corte a 150 m del emisor en el ejemplo de la transparencia 18, siendo  $P_t = 10$  mW y  $P_{min} = -110,5$  dBm?

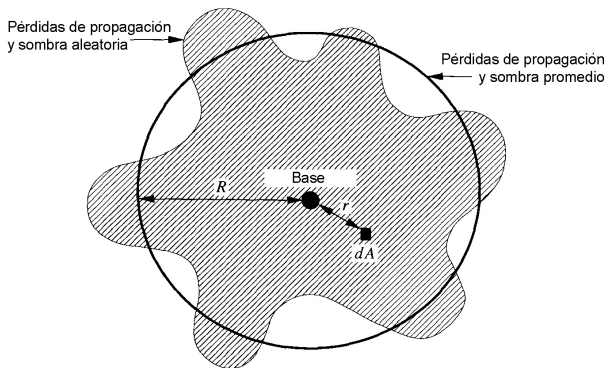
```
Pt=10*log10(10); % Pt en dBm
Pmin=-110.5; % umbral de deteccion
d=150;
gamma=3.71; % del ejemplo anterior
K=-31.54; % del ejemplo anterior
sigma_dB=4.05; % obtenido en el ejemplo anterior

Pr=Pt+K-10*gamma*log10(d);
pout=0.5*erfc((Pr-Pmin)/(sigma_dB*sqrt(2)))
```

El resultado es  $p_{out}(-110,5, 150) = 0,0211$ .

# Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

El **área de cobertura de una célula** es el promedio del porcentaje de superficie de la misma en el que se espera recibir un nivel de señal igual o superior al umbral de detección  $P_{min}$ .



## Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

En un modelo sin atenuación por sombra, si la red se diseña de manera que el radio de una célula (supuesta circular) sea igual a la distancia a la que la potencia promedio recibida vale  $P_{min}$ , el área de cobertura será del 100 %

Con atenuación por sombra sabemos que la probabilidad de estar cubiertos en un punto situado a una distancia  $r$  del emisor es:

$$1 - p_{out}(P_{min}, r) = Q\left(\frac{-\overline{\Delta P}(P_{min}, r)}{\sigma_{\psi_{dB}}}\right)$$

(ya que  $Q(x) = 1 - Q(-x)$ ), y coincide con el porcentaje de área cubierta en promedio del anillo comprendido entre  $r$  y  $r + dr$ .

## Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

Integrando en toda la célula, supuesta de radio  $R$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} C(P_{min}, R) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r (1 - p_{out}(P_{min}, r)) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r Q\left(\frac{-\overline{\Delta P}(P_{min}, r)}{\sigma_{\psi_{dB}}}\right) dr \end{aligned}$$

Si la potencia promedio recibida sigue una típica ley logarítmica

$$\overline{P}_r = P_t + 10 \log_{10} K - 10\gamma \log_{10}(d/d_0)$$

podremos expresar el margen de potencia en función de su valor en la frontera de la célula:

$$\overline{\Delta P}(P_{min}, r) = \overline{\Delta P}(P_{min}, R) - 10\gamma \log_{10} \frac{r}{R}$$

# Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

De donde resulta:

$$\begin{aligned} C(P_{min}, R) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r Q \left( \frac{-\overline{\Delta P}(P_{min}, R) + 10\gamma \log_{10} \frac{r}{R}}{\sigma_{\psi_{dB}}} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r Q \left( a + b \ln \frac{r}{R} \right) dr \end{aligned}$$

siendo

$$a = \frac{-\overline{\Delta P}(P_{min}, R)}{\sigma_{\psi_{dB}}} \quad b = \frac{10\gamma \log_{10} e}{\sigma_{\psi_{dB}}}$$

# Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

El resultado de la integración es:

$$C(a, b) = Q(a) + e^{\frac{2-2ab}{b^2}} Q\left(\frac{2-ab}{b}\right).$$

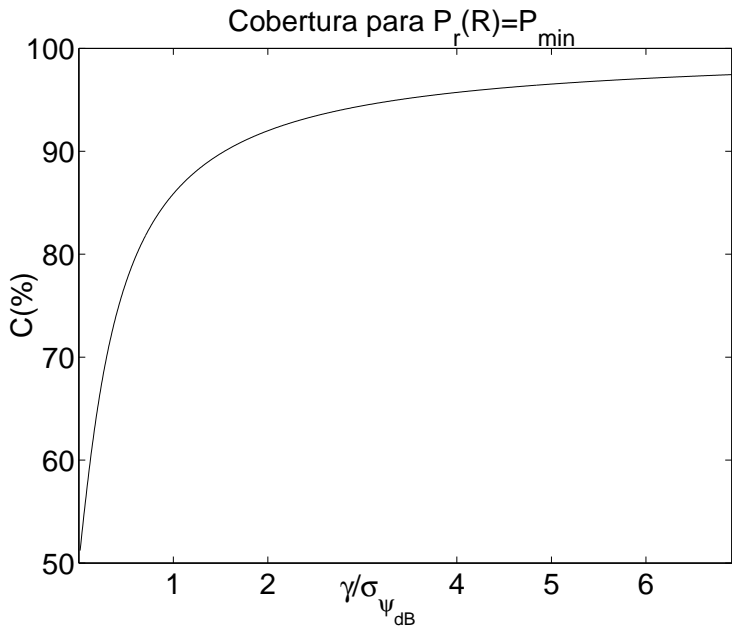
Habitualmente las células se diseñan con  $P_{min} = \bar{P}_r(R)$ , es decir, de modo que el margen en la frontera,  $\overline{\Delta P}(P_{min}, R)$  sea nulo. En tal caso es  $a = 0$  y la cobertura queda:

$$C(b) = \frac{1}{2} + e^{\frac{2}{b^2}} Q\left(\frac{2}{b}\right).$$

Es decir, el área de cobertura depende de un único parámetro  $b$ , que es proporcional a  $\gamma/\sigma_{\psi_{dB}}$ .



## Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)



# Área de cobertura y probabilidad de corte (outage)

Ejemplo: para el modelo de pérdidas de las transparencias 18 y 27, ¿qué cobertura tiene una célula de radio 600 m si la potencia emitida es  $P_t = 20$  dBm y el umbral de detección  $P_{min} = -110$  dBm? ¿Y si  $P_{min} = -120$  dBm?

```
Pt=20; % Pt en dBm
Pmin=-110; % umbral de deteccion (-120 en el segundo ejemplo)
R=600;
gamma=3.71; % del ejemplo anterior
K=-31.54; % del ejemplo anterior
sigma_dB=4.05; % del ejemplo anterior

Pr_R=Pt+K-10*gamma*log10(R); % potencia media en la frontera
a=(Pmin-Pr_R)/sigma_dB;
b=10*gamma*log10(exp(1))/sigma_dB;

C=100*(0.5*erfc(a/sqrt(2))+exp((-2*a*b)/b^2)*0.5*erfc((2-a*b)/(b*sqrt(2))))
```

El resultado es  $C = 60,0\%$  en el primer caso y  $C = 98,2\%$  en el segundo.

# Bibliografía

## Básica:

- ▶ A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cap. 2. Cambridge University Press, 2005

## Complementaria:

- ▶ J.D. Parson, *The Mobile Radio Channel*, Wiley, 2000
- ▶ V. Erceg, J. L. Greenstein, S. Y. Tjandra, S. R. Parkoff, A. Gupta, B. Kulic, A. A. Julius y R. Bianchi, *An empirically based path loss model for wireless channels in suburban environments*, IEEE J. Sel. Areas Commun., 1205-11, 1999.
- ▶ S. S. Ghassemzadeh, L. J. Greenstein, A. Kavcic, T. Sveinsson y V. Tarokh, *Indoor path loss model for residential and commercial buildings*, Proc. IEEE Trans. Veh. Tech. Conf., 3115-19, 2003.
- ▶ J. B. Anderson, T. S. Rappaport, S. Yoshida, *Propagation measurements and models for wireless communications channels*, IEEE Comm. Magazine, 1994
- ▶ M. J. Feuerstein, K. L. Blackard, T. S. Rappaport, S. Y. Seidel, H. H. Xia, *Path loss, delay spread and outage models as functions of antenna height for microcellular system design*, IEEE Trans. on Vehicular Techn., 43, 3, 487-498, 1994.
- ▶ A. Algans, K. I. Pedersen y P. E. Mogensen, *Experimental analysis of the joint statistical properties of azimuth spread, delay spread and shadow fading*, IEEE J. Sel. Areas Commun., 523-31, 2002.